

משוואות עם מכנה מספרי - חזרה לפני מעבר נושא

כל כך הרבה משוואות שפתרנו בשנה וחצי האחרונות, לא הגיע הזמן לחדש קצת? ובכן הנה החידוש לפניכם:
משוואות עם משתנה\נעלם במכנה.

בנושא זה אתם תכירו מושגים כמו מכנה משותף, תחום הצבה, פישוט, ביטול\בידוד של מכנים, ועוד.

בואו נתחיל בפשטות: חזרה על דרך פתרון של משוואות עם מספר כמכנה:

על מנת לפתור משוואות עם מכנה מספרי, עלינו "לבטל" את המכנים. כיצד עושים זאת?

1. נמיר את כל איברי המשוואה לשברים
2. אם יש צורך, נפשט את כל המשוואה, מונים ומכנים.
3. נמצא את המכנה המשותף בין כל השברים - מספר שהוא כפולה של כל אחד מן המונים.
4. נכפול או נחלק את כל השברים בכמה שנדרש על מנת להגיע למכנה המשותף בכל שבר
5. ניפטר מן המכנים, וניצור משוואה הבנויה ממספרים ואיברים שלמים בלבד.
6. נפתור את המשוואה, ונמצא את ערך המשתנה.

כל זה יפה מאוד, אבל איך זה נראה בכתוב מתמטי?

לפניכם דוגמת התרגיל:

$$\frac{2x+1}{3} + \frac{2(4-x)}{-6} = 0$$

$$\frac{2x+1}{3} + \frac{2(4-x)}{-6} = \frac{0}{1} \text{ השלב הראשון - המרת האיברים השלמים לשברים:}$$

$$\frac{2x+1}{3} + \frac{8-2x}{-6} = \frac{0}{1} \text{ השלב השני - פישוט המשוואה:}$$

$$1*-6=-6 \mid 3*-2=-6 \text{ השלב השלישי - מציאת מכנה משותף:}$$

$$\frac{-2(2x+1)}{-2*3} + \frac{1(8-2x)}{1*-6} = \frac{-6*0}{-6*1} \text{ השלב הרביעי - הכפלת\חילוק השברים לקבלת מכנה משותף שווה:}$$

$$-4x - 2 + 8 - 2x = 0 \text{ השלב החמישי - ביטול המכנים ובניית משוואה נטולת שברים:}$$

$$x = 1 \text{ השלב השישי - פתירת המשוואה ומציאת ערכו של המשתנה:}$$

ובך אנו פותרים משוואה הבנויה משברים בעלי מכנה מספרי.

תחום הצבה

כפי שכולנו למדנו ביסודי, תוצאתו של תרגיל חילוק ב-0, תהיה שווה לבח"מ (ביטוי חסר משמעות) או במקרה של מחשבון - שגיאה מתמטית.

לכן, כשאנו ניגשים לפתור משוואה כשיש שבר במכנה, אנו צריכים לוודא כי הערך הסופי שנמצא לאותו המשתנה לא יאפס את המכנה. מה הכוונה? נכתוב מה המשתנה לא יכול להיות, לא משנה מה, כדי שהמכנה לא יהיה שווה אפס. (אם אתם תוהים למה הוא לא יכול להיות שווה ל-0, התשובה תהיה כי פתרון התרגיל יהיה שגיאה מתמטית).

איך נראה תחום הצבה?

השלב הראשון בפתרון משוואה עם משתנה במכנה, יהיה לכתוב תחום הצבה, שימו לב! זהו חלק מהותי בפתירת תרגילים כאלו, ופתרון שאינו כולל תחום הצבה ייחשב כשגוי, בעבודה ובבחינה מכל סוג.

תחום הצבה נראה ממש כמו פתרון של משוואה, לאחר מציאת ערך המשתנה, אך מה ההבדל? במקום סימן שוויון (=), אנו נכתוב סימן אי שוויון ($\neq$). לדוגמה, אם נתונה לנו משוואה כאשר המכנה שלה הוא $x-2$, אז לפי ההיגיון והתבונה שלנו, נדע כי המכנה יהיה שווה ל-0 כאשר x יהיה שווה ל-2. (בגלל ששתיים פחות שתיים שווה לאפס). לכן תחום ההצבה של המכנה הזה יהיה $x \neq 2$.

כיצד אנו מוצאים תחום הצבה?

ישנם 2 דרכים למציאת תחום הצבה

1. היגיון פשוט - כפי שלמדנו על פתרון משוואות פשוטות בתחילת שנת הלימודים בכיתה ז', אנו בודקים בהיגיון ובחישוב מהיר איזה ערך למשתנה יאפס את המכנה.

2. משוואות עזר - על מנת למצוא תחום הצבה למכנים מסובכים ומורכבים יותר, אנו יכולים פשוט לבנות משוואות עזר בצורה הבאה: המכנה הנתון $\neq$ אפס.

אז בואו נעצור רגע! עד עכשיו עבדנו מילולית, בואו נעבוד מתמטית עם הדוגמה הבאה:

$$\frac{4}{3-x} + \frac{9-2x}{2x-6} + 1 = \frac{5}{2}$$

בואו נייער ב-2 דרכי מציאת תחום ההצבה שלנו:

1. היגיון פשוט - אם x יהיה שווה ל-3, המכנה הראשון שלנו יתאפס, משום ששלוש פחות שלוש שווה לאפס, ולכן x לא יכול להיות שווה לאפס. נוסף על כך, במכנה השני שלנו, אם x יהיה שווה ל-3, המכנה השני שלנו יתאפס, משום ששלוש כפול שתיים שווה לשש, ואילו מינוס שש ועוד שש שווה לאפס. משום שאין לנו עוד מכנים במשוואה עם משתנים כלולים בהם, תחום ההצבה שלנו יישאר רק שהמשתנה לא יכול להיות שווה ל-3, ולכן נסמן את תחום ההצבה כך: $x \neq 3$

2. בניית משוואות עזר - כפי שהורחב קודם לכן, על מנת למצוא את תחום ההצבה לכל מכנה, עלינו להשוות אותו לאפס, בכדי למצוא למה המשתנה אסור שיהיה שווה, על מנת שהמשוואה תהיינה תקינה מבחינה מתמטית. נתחיל עם המכנה הראשון: $3-x \neq 0$ פתרון המשוואה ותחום ההצבה שלנו יהיה $x \neq 3$

פתרון המשוואה באופן מלא

איך נפתור באופן מלא משוואה עם משתנה במכנה? ובכן, התשובה שלנו צריכה לכלול את הדרך הבאה:

1. המרה לשברים ופישוט
2. תחום הצבה
3. מכנה משותף
4. ביטול מכנים
5. פתרון המשוואה ומציאת ערך המשתנה
6. בדיקת הפתרון באמצעות תחום ההצבה

הבא נפתור זאת בדרך מתמטית ב-2 דוגמאות:

$$\frac{2x-6}{9x} - \frac{7x-2}{3x} = 4$$

1. המרה לשברים: $\frac{4}{1}$

2. תחום הצבה:

$$9x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$3x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

3. מכנה משותף: נכפיל את המכנה השני ב-3 ואת המכנה השלישי ב-9 לקבלת מכנה שווה $3(7x-2)$

4. ביטול מכנים: מכיוון שהמכנים שווים, נוכל "למחוק" אותם, ולפתור משוואה הבנויה רק מהמונים.
 $2x - 6 - 21x + 6 = 36x$

5. פתרון המשוואה: $x=0$

6. בדיקת הפתרון: בגלל שהפתרון נוגד את תחום ההצבה, ואינו יכול להתקיים במשוואה הזו, אין למשתנה פתרון, ולכן התשובה תהיה $x = \emptyset$

משוואה נוספת:

$$\frac{3x+6}{6x} + \frac{4}{3x} = 1$$

1. המרה לשברים: $\frac{1}{1}$

2. תחום הצבה:

$$6x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$3x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

3. מכנה משותף: נכפיל את המכנה השני ב-2 ואת המכנה השלישי ב-6, לקבלת מכנה שווה. $2 \cdot 4$

4. ביטול מכנים: מכיוון שהמכנים שווים, נוכל "למחוק" אותם, ולפתור משוואה הבנויה רק מהמונים.
 $3x + 6 + 8 = 6x$

5. פתרון המשוואה: $x = 4.66$

6. בדיקת הפתרון: לפי תחום ההצבה, x יכול להיות 4.66 מבלי לגרום לשגיאה מתמטית במשוואה, כלומר, הגענו לפסוק אמת.

אז מה למדנו בעצם?

- חזרה על פתרון משוואות עם מכנה מספרי
- הכרת תת הנושא תחום הצבה ודרך הכתיבה והמציאה שלו
- שלבי פתירת משוואה עם משתנה במכנה, מהפישוט והמרת המספרים השלמים לשבר, ועד בדיקת הפסוק אליו הגענו לצורך ויידוא הגעה לפסוק אמת